

---

ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)  
Semestre d'automne — 2025-2026

Série 10: Représentations matricielles d'applications linéaires;  
valeurs et vecteurs propres

---

**Objectifs de cette série**


À la fin de cette série vous devriez être capable de

- (O.1) continuer à **utiliser les matrices de passage** pour **calculer les coordonnées** d'un vecteur ;
- (O.2) continuer à **utiliser les représentations matricielles** des applications linéaire relatives à des bases, ainsi que leur **lien avec les matrices de passage pour calculer des représentations relatives à des bases différentes** ;
- (O.3) **calculer le polynôme caractéristique, les valeurs et les espaces propres** d'une matrice carrée.

**Nouveau vocabulaire dans cette série**

- valeur propre
- vecteur propre
- espace propre
- polynôme caractéristique

---

 **Noyau d'exercices**

**1.1 Changements de bases**

**Exercice 1 (Changements de bases non-canoniques I)**

On considère les bases (ordonnées)

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2} \right\} \text{ et } \mathcal{B}' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b'_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b'_2} \right\}$$

de  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) Donner la matrice de changement de base (ou matrice de passage) de la base  $\mathcal{B}'$  vers la base  $\mathcal{B}$ .
- (b) Donner la matrice de changement de base (ou matrice de passage) de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{B}'$ .

(c) Soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  l'unique vecteur qui satisfait que

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}$ .

(d) Soit  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$  l'unique vecteur qui satisfait que

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ .

### Exercice 2 (Changements de bases non-canoniques II)

On considère deux bases (ordonnées)

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2\} \text{ et } \mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2\}$$

d'un espace vectoriel  $V$  telles que  $v_1 = 6v'_1 - 2v'_2$  et  $v_2 = 9v'_1 - 4v'_2$ .

- Calculer la matrice de changement de  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{B}'$ .
- Trouver  $[v]_{\mathcal{B}'}$  pour  $v = -3v_1 + 2v_2$  en utilisant l'item précédent.

## 1.2 Matrices d'applications linéaires

### Exercice 3 (Matrices d'applications linéaires)

(a) Soit  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , et soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

les bases de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ , respectivement.

- Calculer la représentation matricielle  $T$  relative aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .
  - Donner la représentation matricielle  $T$  relative aux bases  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Soit  $T : \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  l'application linéaire donnée par

$$T(X) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X$$

pour tout  $X \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , et soit

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

une base (ordonnée) de  $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

(i) Calculer la représentation matricielle de  $T$  relative à la base canonique

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de  $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

(ii) Donner la représentation matricielle de  $T$  relative à la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

### 1.3 Valeurs propres et vecteurs propres

#### Exercice 4 (Calcul de valeurs propres I)

Soit  $A$  une matrice carrée de taille 2 et soit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que le système  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  admet une solution non nulle si et seulement si la matrice  $A - \lambda I_2$  n'est pas inversible.  
 (b) On suppose désormais que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $A\mathbf{v}$ .

- (c) Trouver pour quelles valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$  la matrice  $A - \lambda I_2$  n'est pas inversible. En déduire que les deux valeurs trouvées ci-dessus sont des valeurs propres de  $A$ .  
 (d) Calculer les espaces propres correspondants aux deux valeurs propres.

#### Exercice 5 (Calcul de valeurs propres II)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Est-ce que  $\lambda = 6$  est une valeur propre de  $A$ ? Répondre sans calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .  
 (b) Même question avec  $\lambda = 1$  et  $\lambda = -9$ .  
 (c) Maintenant calculer le polynôme caractéristique de  $A$  et les valeurs propres de  $A$ .

#### Exercice 6 (Calcul de valeurs propres III)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que 0 et 6 sont des valeurs propres de  $A$ , et calculer les espaces propres associés.



**Exercice 7 (Valeurs propres de l'inverse et de la transposée)**

- (a) Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre d'une matrice carrée inversible  $A$  de taille  $n$ , alors  $\lambda^{-1}$  est une valeur propre de  $A^{-1}$ . Trouver un vecteur propre correspondant.
- (b) Montrer que  $A$  et  $A^T$  ont les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de  $A$  et  $A^T$  ne sont pas les mêmes en général.



**Pour compléter la pratique**

**2.1 Changements de bases**

**Exercice 8 (Changements de bases non-canoniques III)**

On considère les bases (ordonnées)

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b_2} \right\} \text{ et } \mathcal{B}' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}}_{b'_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b'_2} \right\}$$

de  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) Déterminer la matrice de changement de base (ou matrice de passage) de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{B}'$ .
- (b) Calculer la matrice de changement de base (ou matrice de passage) de la base  $\mathcal{B}'$  vers la base  $\mathcal{B}$ .

**2.2 Matrices d'applications linéaires**

**Exercice 9 (QCM sur matrices d'applications linéaires, valeurs et vecteurs propres)**

Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

- (a) Si  $A$  est une matrice carrée de taille 3 et  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de  $A$ , alors

- $\lambda^{-1}$  est une valeur propre de  $-A$ ;
- $\lambda$  est une valeur propre de  $-A$ ;
- $\lambda^{-1}$  est une valeur propre de  $A^{-1}$ ;
- $\lambda$  est une valeur propre de  $A^{-1}$ .

- (b) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- admet l'unique valeur propre  $\lambda = 6$ ;

- admet les valeurs propres  $\lambda = -6$  et  $\lambda = -4$ ;
- admet les valeurs propres  $\lambda = 0$  et  $\lambda = 6$ ;
- admet les valeurs propres  $\lambda = -4$  et  $\lambda = 6$ .

(c) Si l'on pose

$$\mathcal{F} = \{1 - t, 1 + t, 1 + t + t^2\} \subseteq \mathbb{P}_2 \text{ et } \mathcal{F}' = \left\{1, t - \frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right\} \subseteq \mathbb{P}_2,$$

alors

- $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{P}_2$ , mais  $\mathcal{F}'$  ne l'est pas ;
- $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont deux bases de  $\mathbb{P}_2$  ;
- $\mathcal{F}'$  est une base de  $\mathbb{P}_2$ , mais  $\mathcal{F}$  ne l'est pas ;
- ni  $\mathcal{F}$  ni  $\mathcal{F}'$  ne sont des base de  $\mathbb{P}_2$ .

(d) Si l'on pose

$$\mathcal{F} = \{1 - t, 1 + t, 1 + t + t^2\} \subseteq \mathbb{P}_2 \text{ et } \mathcal{F}' = \left\{1, t - \frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\right\} \subseteq \mathbb{P}_2,$$

et

$$P_{\mathcal{F}' \leftarrow \mathcal{F}} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} \text{ et } P_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F}'} = \begin{pmatrix} p'_{1,1} & p'_{1,2} & p'_{1,3} \\ p'_{2,1} & p'_{2,2} & p'_{2,3} \\ p'_{3,1} & p'_{3,2} & p'_{3,3} \end{pmatrix}$$

les matrices de passage respectives, alors

- $p_{1,3} = p'_{2,3} = 0$ ;
- $p_{1,3} = 9/16$  et  $p'_{2,3} = 3/2$ ;
- $p_{1,3} = -1$  et  $p'_{2,3} = -3/4$ ;
- $p_{1,3} = 3/2$  et  $p'_{2,3} = -9/8$ .

(e) Si  $A$  est une matrice carrée non inversible de taille 2, alors

- 0 est une valeur propre de  $A$ ;
- $A$  est la matrice nulle ;
- $A$  n'a pas de valeur propre réelle ;
- tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  est un vecteur propre de  $A$ .

### 2.3 Valeurs propres et vecteurs propres

#### Exercice 10 (Calcul de valeurs propres IV)

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

- (a) Est-ce que  $\lambda = 4$  est une valeur propre de  $A$ ? Si oui, trouver un vecteur propre pour cette valeur propre.  
 (b) Est-ce que

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de  $B$ ?

- (c) Trouver une base de l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = 3$  de la matrice  $C$ . Quelle est la dimension de cet espace propre?

#### Exercice 11 (Calcul de valeurs propres V)

Calculer les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Indication :** Noter que 0 est une valeur propre de  $A$ , car le noyau de  $A$  est non trivial.

#### Exercice 12 (Valeur propre à partir d'une équation)

Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On suppose que

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = \lambda.$$

Calculer

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et conclure que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ .

**Exercice 13 (Valeur propre d'une puissance)**

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n$  et soit  $k \geq 2$  un entier. Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  avec vecteur propre  $\mathbf{v}$ , alors  $\lambda^k$  est une valeur propre de

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ facteurs}}$$

avec vecteur propre  $\mathbf{v}$ .